УДК 539.3:531.2.001:621.81

ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕНОСА С ЧИСТОМОМЕНТНЫМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЕМ

Мартыненко Т. М.

Рассматривается задача об определении такой формы оболочки со срединной поверхностью переноса, в которой заданное силовое поле (внешняя нагрузка) вызывает чистомоментное напряженно-деформированное состояние.

Рассмотрим пологие оболочки постоянной толщины, срединные поверхности которых описываются уравнениями вида [1]:

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta) \qquad \alpha \in [0; a], \beta \in [0; b] \tag{1}$$

Относительно $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ предположим:

$$A \approx 1; \quad B \approx 1 \tag{2}$$

или

$$|\varphi'(\alpha)| << 1; \; |\psi'(\beta)| << 1$$

Тогда [1]

$$\frac{1}{R_1} \approx -\varphi''(\alpha); \; \frac{1}{R_2} \approx -\psi''(\beta); \; \frac{1}{R_{12}} = 0 \tag{3}$$

Здесь A и B коэффициенты первой квадратичной формы; $\frac{1}{R_1}$; $\frac{1}{R_2}$; $\frac{1}{R_{12}}$ - кривизны и кручение срединной поверхности (1). Требуется определить функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ из условий, что заданная внешняя нагрузка вызывает в оболочке только моментные напряжения, т.е.

$$T_1 = T_2 = S = 0; \; T_{12} = \frac{H}{R_2}; \; T_{21} = \frac{H}{R_1} \tag{4}$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2);\ M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1);\ H = D(1-\mu)\chi_{12};\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \qquad (5)$$

E; μ; h - $const$ (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, толщина)

Разрешающая система уравнений рассматриваемой задачи состоит из уравнений равновесия, уравнений совместности деформаций и закона Гука, которые в силу (2) и (3) принимают такой вид [1].

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H}{R_1}\right) + \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = 0;\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{H}{R_2}\right) + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0;\ \frac{\partial Q_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial\beta} + q_3 = 0;$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\beta} - Q_1 = 0;\ \frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial\alpha} - Q_2 = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial\beta} - \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\alpha} = 0;\ \frac{\partial\chi_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial\chi_{12}}{\partial\beta} = 0;\ \frac{\chi_1}{R_2} + \frac{\chi_2}{R_1} = 0 \qquad (7)$$

$$\chi_1 = \frac{12}{Eh^3}(M_1 - \mu M_2);\ \chi_2 = \frac{12}{Eh^3}(M_2 - \mu M_1);\ \chi_{12} = \frac{12}{Eh^3}H \qquad (8)$$

Здесь $q_i(\alpha;\beta)$ - компоненты внешней поверхностной нагрузки, $i = \overline{1,3}$.

Исключая из (6) Q_1, Q_2 перепишем уравнения равновесия в таком виде:

$$\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + 2\frac{\partial H}{\partial\beta}\right) + q_1 = 0;\ \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + 2\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right) + q_2 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial M_2}{\partial\beta} + \frac{\partial H}{\partial\alpha}\right) + q_3 = 0 \qquad (9)$$

Из (9) следует:

$$2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} = q_3 - \frac{\partial}{\partial\alpha}(R_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 q_2) = 0 \qquad (10)$$

Откуда следует:

$$2H(\alpha;\beta) = f(\alpha) + g(\beta) + \int_0^\alpha \int_0^\beta (q_3 - \frac{\partial}{\partial\alpha}(R_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 q_2)) d\alpha d\beta$$

где $f(\alpha) = 2H(\alpha;0) - g(0)$, $g(\beta) = 2H(0;\beta) - f(0)$

Поэтому

$$f(\alpha) + g(\beta) = 2H(\alpha;0) + 2H(0;\beta) - f(0) - g(0) = 2H(\alpha;0) + 2H(0;\beta) - 2H(0;0)$$

$$f(0) + g(0) = 2H(0;0) + 2H(0;0) - f(0) - g(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(0) + 2g(0) = 4H(0;0) \Rightarrow f(0) + g(0) = 2H(0;0)$$

Тогда

$$2H(\alpha;\beta) = 2H(\alpha;0) + 2H(0;\beta) - 2H(0;0) + \int_0^\alpha \int_0^\beta (q_3 - \frac{\partial}{\partial\alpha}(R_1 q_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 q_2)) d\alpha d\beta \quad (11)$$

Здесь $H(\alpha;0)$; $H(0;\beta)$; $H(0;0)$ определяются из граничных условий. Поэтому будем считать в дальнейшем $H(\alpha;\beta)$ известной функцией $\alpha \in [0;a], \beta \in [0;b]$.

Для нахождения неизвестных M_1; M_2 воспользуемся первыми двумя уравнениями равновесия (9) и уравнениями совместности деформации, которые перепишем в таком виде:

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} = -R_1 q_1 - 2\frac{\partial H}{\partial\beta}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial\beta} = -R_2 q_2 - 2\frac{\partial H}{\partial\alpha}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\beta} = (1+\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha} + \mu\frac{\partial M_2}{\partial\beta}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial\alpha} = (1+\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta} + \mu\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} \quad (12)$$

Система (11) может быть преобразована к такому виду:

$$\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} = -R_1 q_1 - 2\frac{\partial H}{\partial\beta}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial\beta} = -R_2 q_2 - 2\frac{\partial H}{\partial\alpha}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial\beta} = (1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha} - \mu\frac{\partial M_2}{\partial\beta}; \quad \frac{\partial M_2}{\partial\alpha} = (1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta} - \mu\frac{\partial M_1}{\partial\alpha} \quad (13)$$

Предположим, что имеют место следующие равенства:

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial\beta}) = \frac{\partial}{\partial\alpha}((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha} - \mu R_2 q_2);$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}(R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial\alpha}) = \frac{\partial}{\partial\beta}((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta} - \mu R_1 q_1) \qquad (14)$$

Тогда

$$M_1 = \int\limits_{M_0 M} (-(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial\beta}))d\alpha + ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha} - \mu R_2 q_2))d\beta = 0;$$

$$M_2 = \int\limits_{M_0 M} ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta} - \mu R_1 q_1)d\alpha - (R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial\alpha})d\beta \qquad (15)$$

Фигурирующие в (14) криволинейные интегралы не зависят от пути интегрирования, так как при выполнении (13) подынтегральные выражения в них предоставляются полными дифференциалами.

Исходное интегро-дифференциальное уравнение получаем с помощью третьего уравнения системы (7), которое предварительно преобразуем с помощью (8):

$$\psi''(\beta)(M_1 - \mu M_2) + \varphi''(\alpha)(M_2 - \mu M_1) = 0 \qquad (16)$$

Подставив (15) в (14), получим окончательно:

$$\begin{aligned} &\psi''(\beta)(\int\limits_{M_0 M} (-(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial\beta}))d\alpha + ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha} - \mu R_2 q_2))d\beta - \\ &-\mu \int\limits_{M_0 M} ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta} - \mu R_1 q_1)d\alpha - (R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial\alpha})d\beta) + \\ &+\varphi''(\alpha)(\int\limits_{M_0 M} ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\beta} - \mu R_1 q_1)d\alpha - (R_2 q_2 + 2\frac{\partial H}{\partial\alpha})d\beta - \\ &-\mu \int\limits_{M_0 M} (-(R_1 q_1 + 2\frac{\partial H}{\partial\beta}))d\alpha + ((1-\mu)\frac{\partial H}{\partial\alpha} - \mu R_2 q_2))d\beta) = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Входящая в (16) функция $H = H(\alpha;\beta)$ определяется формулой (10). Равенства (13) следует рассматривать как условия корректной разрешимости уравнения (16) и поэтому всей сформулированной задачи в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М., Машиностроение.-1977г.
2. Огибалов М.П. Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М., Издательство МГУ, 1969 г.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М., ГИТТЛ, 1953г.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. издание 2 , М., Наука, 1976г